

基于椭圆积分的单支点半柔壁喷管大挠度成型半解析求解与验证

尉成果^{1,2}, 张志利¹, 赖欢², 陈万华², 陈振华², 聂旭涛²

(1. 火箭军工程大学 导弹工程学院, 西安 710025;

2. 中国空气动力研究与发展中心 设备设计与测试技术研究所, 四川 绵阳 621000)

摘 要: 为提升跨超声速风洞单支点半柔壁(SJSF)喷管分析精度和效率, 发展了基于椭圆积分的柔性壁板大挠度变形半解析求解方法。以 0.3 m 低温风洞单支点半柔壁喷管为研究对象, 建立型面组件力学模型, 基于欧拉梁理论推导柔性壁板型面曲线的微分方程, 给出了椭圆积分的表达形式。利用 Maple 软件编制了计算程序, 并以此针对马赫数为 1.15 和 1.3 两种工况, 开展柔性壁板大挠度变形的半解析求解, 得到了变形型面坐标和结构等效应力曲线。通过对比有限元(FEM)仿真结果以及实验测量数据, 结果表明: 基于椭圆积分的求解结果与其他两种结果均能良好吻合, 型面坐标最大偏差分别为喷管出口高度尺寸的 0.18% 和 0.32%, 结构等效应力最大相对误差小于 10%, 椭圆积分求解耗时仅为有限元仿真的 11.2%。

关 键 词: 半柔壁喷管; 单支点; 大挠度; 欧拉梁; 椭圆积分

中图分类号: V216.8

文献标志码: A

Semi-analytic solution and verification for large deflection forming of single-jack semi-flexible nozzle based on elliptic integral

YU Chengguo^{1,2}, ZHANG Zhili¹, LAI Huan², CHEN Wanhua²,
CHEN Zhenhua², NIE Xutao²

(1. College of Missile Engineering,

Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China;

2. Facility Design and Instrumentation Institute,

China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China)

Abstract: To improve the analysis accuracy and efficiency of single-jack semi-flexible (SJSF) nozzles in transonic and supersonic wind tunnels, a semi-analytical solution method based on ellipse integral for the flexible plate large deflection was developed. Taking the 0.3 m cryogenic wind tunnel SJSF nozzle as the research object, the mechanical model was established. Based on the Euler beam theory, the differential formulas of the flexible plate deflection were derived, and the elliptic integral form was obtained. Based on the program compiled using Maple software, the semi-analytic solution was carried out under Mach number of 1.15 and 1.3 condi-

收稿日期: 2021-02-23

基金项目: 国家自然科学基金(51935006)

作者简介: 尉成果(1987—), 男, 副研究员, 博士生, 主要从事风洞结构设计研究。

通信作者: 聂旭涛(1979—), 男, 副研究员, 博士, 主要从事风洞结构设计研究。E-mail: nie_xu_tao@163.com

引用格式: 尉成果, 张志利, 赖欢, 等. 基于椭圆积分的单支点半柔壁喷管大挠度成型半解析求解与验证[J]. 航空动力学报, 2022, 37(2): 383-390. YU Chengguo, ZHANG Zhili, LAI Huan, et al. Semi-analytic solution and verification for large deflection forming of single-jack semi-flexible nozzle based on elliptic integral[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(2): 383-390.

tions. The deformation contour and structural equivalent stress were obtained. Compared with the finite element method (FEM) results and experimental measurement, it showed that the elliptic integral results were in good agreement with the other two results. The maximum error of the contour coordinates was 0.18‰ and 0.32‰ of the nozzle outlet height size, respectively. The maximum relative error of the equivalent stress was less than 10%, and the elliptic integral solution time was only 11.2% of the FEM.

Key words: semi-flexible nozzle; single-jack; large deflection; Euler beam; elliptic integral

柔壁喷管是实现跨超声速风洞连续变换马赫数的重要核心部件^[1-3],单支点半柔壁喷管不仅能够连续、快速调节马赫数,而且结构简单、控制高效,已被广泛应用于国内外多座风洞设备^[4-5]。Rosen^[5]设计了世界上第一套单支点半柔壁喷管,并完成了喷管的流场校测工作。中国空气动力研究与发展中心(CARDC)0.3 m 低温风洞是我国首座低温连续式跨声速风洞^[6-8],采用了单支点半柔壁喷管,能够实现马赫数范围为 0.15~1.30 的实验能力。单支点半柔壁喷管通过驱动机构实现喉道固块的刚性转动和柔性壁板的弹性变形,继而实现风洞马赫数流道型面的切换。实践经验表明,位于喉道之后的柔性壁板的变形精度是实验流场均匀性和实验马赫数精确性的最直接、最关键因素。因此,在喷管结构设计与运动调试过程中,十分有必要开展柔性壁板弹性变形的高效率、高精度求解工作。

聂旭涛等^[9-10]基于刚柔耦合动力学理论,联合机械系统动力学自动分析(ADAMS)和美国国家航空航天局结构分析(NASTRAN)等数值仿真软件,研究了半柔壁喷管机构动力学仿真技术,为半柔壁喷管结构的设计、分析、运动控制提供了有效的技术手段。Chen 等^[11]利用刚柔耦合动力学软件研究了单支点半柔壁喷管型面的计算方法和动力学特性。刘佳鑫等^[12]研究了半柔壁喷管喉道块与柔性壁板之间接触力仿真的问题。这些研究成果表明,刚柔耦合动力学理论能够良好适用于半柔壁喷管机构的动力学行为模拟,尤其是复杂机构组成的动力学系统,可以获得较高精度的变量结果,如型面坐标、结构应力、运动速度、驱动载荷等,其主要不足是,建模过程复杂、分析效率较低,不利于结构与气动之间的快速迭代设计,限制了马赫数成型机构的性能优化水平。

另一方面,针对半柔壁喷管大挠度成型问题开展了半解析求解方法研究。刘铭甲^[13]基于弯曲

梁小挠度变形理论,提出了半柔壁喷管的挠性板弹性变形曲线计算方法。张晓伟等^[14]研究了柔壁喷管分段线性化求解方法,柔性壁板被分为多个子段,大挠度变形问题近似为多个小变形梁问题。可见,分段线性化本质上还是基于小挠度梁理论,求解结果不可避免地存在一定近似误差。所以,柔性壁板大挠度成型问题的精确求解应该依据大挠度梁理论,消除近似误差的影响。

国内外学者对大挠度梁理论进行了大量的研究^[15-23]。其中基于椭圆积分的求解方法具有求解形式简洁、计算精度高等优点而受到广泛关注。Bisshopp 等^[15]研究了垂直载荷下大挠度梁的椭圆积分解法,给出了椭圆积分解与小挠度梁近似解之间的相对误差。Howell 等^[16]研究了力和弯矩共同作用下悬臂梁的椭圆积分解。Zhang 等^[17-18]针对平面梁的多拐点复杂弯曲问题,提出了完备椭圆积分解方法,拓展了椭圆积分方法的求解能力。安朝等^[19]给出了弹性欧拉梁大变形分析的椭圆积分统一形式。Xu 等^[20-21]研究了基于椭圆积分的组合弹性梁大挠度精确求解问题。Alessandro 等^[22]研究了自由端任意角度条件下的悬臂梁椭圆积分解。

综上,椭圆积分方法已成为弯曲梁大挠度问题精确求解的有力工具,但是在半柔壁喷管大挠度成型方面,尚缺乏相应的研究。本文基于欧拉梁理论建立柔性壁板的大挠度变形微分方程,并详细推导其椭圆积分的表达形式,在此基础上,利用数学工具软件编制计算程序,开展实际单支点半柔壁喷管的机构力学求解和实验验证。

1 单支点半柔壁喷管力学模型

1.1 结构组成与工作原理

图 1 为 CARDC 0.3 m 低温风洞单支点半柔壁(SJSF)喷管的三维结构模型,主要包括侧壁、型面组件、驱动机构以及驻室等。其中左右侧壁为

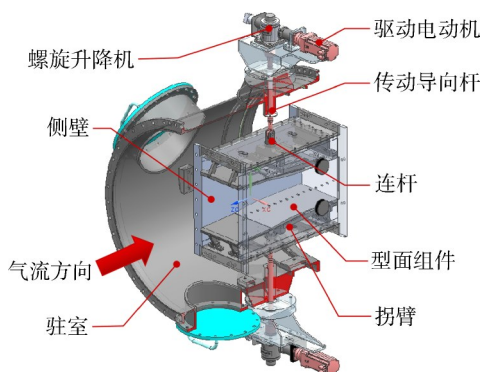


图1 0.3 m低温风洞单支点半柔壁喷管

Fig.1 SJSF nozzle in 0.3 m cryogenic wind tunnel

平面壁,固定在驻室内的框架上;上下型面组件为曲面壁,安装在左右侧壁之间,其主要包括喉道固块、柔性壁板、传动导向杆、驱动电动机、螺旋升降机等。

柔性壁板前端与喉道固块连接,尾端通过弹性板联接在喷管出口处;喉道固块通过拐臂铰接在左右侧壁,能够绕驻室内一个固定点转动;伺服电动机通过螺旋升降机-连杆组合机构,驱动喉道固块转动,继而带动柔性壁板发生弹性变形,从而形成所需的马赫数喷管型面,实现气体的超声速流动。

喉道固块的结构厚度远大于柔性壁板,实际计算时可视为刚性组件,力学行为为绕驻室空间一确定点的刚体旋转运动。受此刚体运动牵带作用,柔性壁板前端发生强迫位移和转角,尾端受弹性连接板约束,能够沿轴向移动,以补偿柔性壁板沿风洞轴向方向的长度变化。

1.2 力学模型

单支点半柔壁喷管型面组件的力学模型如图2所示,即柔性壁板前端受喉道固块刚性转动的强迫位移和转角作用,尾端为单向滑动约束。

风洞洞体坐标系下,将坐标系原点定在喷管

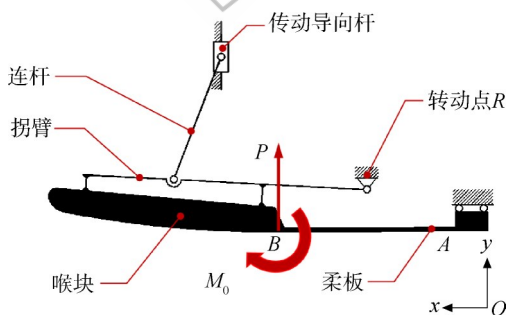


图2 单支点半柔壁喷管型面组件机构简图

Fig.2 Mechanism schematic diagram of SJSF nozzle contour component

出口中心点 O , 柔性壁板出口为 A 点, 坐标为 $(x', 0)$, 转角为零; 喉道固块与柔性壁板连接点为 B 点, 坐标为 (x_B, y_B) , 喉道固块转动角度为 θ_B 。喉道固块对柔性壁板施加集中力 P 和弯矩 M_0 作用。考虑到出口端沿风洞轴线方向可自由滑动, 柔性壁板沿风洞轴线方向力为零。

柔性壁板弯曲变形为一类矩形板弯曲问题, 两对边位移受约束, 另两对边位移自由, 主要变形为图2中的 xOy 平面内变形, 远大于宽度方向上的变形量。弯曲变形时, 近似认为每个截面均保持为矩形, 不发生变形, 即假定柔性壁板为矩形宽梁, 可简化为欧拉梁模型。

根据刚体平面运动理论方法, 可以利用驱动杆、连杆、拐臂的相对几何关系, 求解出对应驱动量下喉道固块的型面位置。并将柔性壁板与喉道固块连接点位置的坐标, 作为求解柔性壁板大挠度变形的输入条件。

2 柔性壁板大挠度变形的椭圆积分解

根据欧拉梁假设, 梁在平面弯曲时, 曲率与弯矩之间满足以下关系^[23]:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

其中 θ 为转角, s 为长度, ρ 为曲率半径, M 为弯矩, E 为弹性模量, I 为截面惯性矩。图2中, 柔性壁板上任意一点 x 处所受弯矩为

$$M(x) = M_0 + P(x_B - x) \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)可以得到

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M_0 + P(x_B - x)}{EI} \quad (3)$$

两端对 s 求微分得到

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = \frac{P}{EI} \cdot \frac{dx}{ds} \quad (4)$$

对于一个微段, dx 、 dy 与 ds 关系式如下:

$$dy = \sin \theta \cdot ds, \quad dx = \cos \theta \cdot ds \quad (5)$$

定义 $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, 式(4)可以写成

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = \alpha^2 \cos \theta \quad (6)$$

式(6)两端乘以 $d\theta$, 得到

$$\frac{d\theta}{ds} d \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = \alpha^2 \cos \theta d\theta \quad (7)$$

对式(7)两端积分

$$\int \frac{d\theta}{ds} d \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = \alpha^2 \int \cos \theta d\theta + C \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \alpha^2 \sin \theta + C \quad (9)$$

柔性壁板与喉道固块连接端边界条件为

$$M(x_B) = -M_0, \quad \theta = \theta_B, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{M_0}{EI} \quad (10)$$

将边界条件代入式(9)求出常数项

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{M_0}{EI} \right)^2 - \alpha^2 \sin \theta_B \quad (11)$$

得到 ds 与 $d\theta$ 关系

$$\sqrt{2} ds = \frac{1}{\alpha \sqrt{\sin \theta - \sin \theta_B + k}} d\theta \quad (12)$$

其中 $k = \frac{M_0^2}{2PEI}$, 对式(12)两端积分, s 积分上下限为 $[0, l]$, θ 积分上下限为 $[0, \theta_B]$, 得到

$$\sqrt{2} l = \int_0^{\theta_B} \frac{1}{\alpha \sqrt{\sin \theta - \sin \theta_B + k}} d\theta \quad (13)$$

式(13)为柔性壁板弧长与角度的关系式。由于 y 方向挠度变形最大值为 y_1 , 并且在一个微段内满足式(5), 将 ds 与 $d\theta$ 关系带入式(12)中, 并对两端积分得到 y_1 与 θ_B 方程式。

$$\sqrt{2} y_1 = \int_0^{\theta_B} \frac{\sin \theta}{\alpha \sqrt{\sin \theta - \sin \theta_B + k}} d\theta \quad (14)$$

式(13)和式(14)写成椭圆积分表达形式为

$$\begin{cases} l = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \lambda} f \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \lambda} (f + \lambda^2 e) \end{cases} \quad (15)$$

式(15)中各字母定义如下:

$$\lambda = \sqrt{\sin \theta_B - k - 1}, \quad f = F(\gamma_1, t) - F(\gamma_2, t), \\ e = E(\gamma_1, t) - E(\gamma_2, t).$$

其中 $F(\cdot)$ 为第一类不完全椭圆积分, $E(\cdot)$ 为第二类不完全椭圆积分。

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{k}{-\sin \theta_B + k - 1}}, \\ \gamma_2 = \sqrt{\frac{\sin \theta_B - k}{\sin \theta_B - k + 1}}, \\ t = \sqrt{\frac{\sin \theta_B - k + 1}{\sin \theta_B - k - 1}}.$$

求出柔性壁板中性面坐标和偏角后, 可以通过曲线偏置的方式, 求解柔性壁板迎气流型面的坐标和偏角。

解方程组(式(15))得到 M_0 和 P , 得到柔性壁板内流道型面曲线方程, 见方程式(16)和式(17)。

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} (\sqrt{k - \sin \theta_B} + \sqrt{\sin \theta_x + k - \sin \theta_B}) \\ - x' - \frac{h}{2} \sin \theta_x \quad (16)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda} [f' + (k - \sin \theta_B + 1)e'] + \frac{h}{2} \cos \theta_x \quad (17)$$

其中 x' 为柔性壁板出口端沿轴线滑移量, h 为柔性壁板厚度, $f' = F(\gamma'_1, t) - F(\gamma_2, t)$, $e' =$

$$E(\gamma'_1, t) - E(\gamma_2, t), \gamma'_1 = \sqrt{\frac{\sin \theta_x + k - \sin \theta_B}{k - \sin \theta_B - 1}}.$$

至此得到了柔性壁板内型面曲线关于角度 θ_x 的显式表达式。

文献[23]中给出了弹性梁的结构应力公式。根据前文已求解出的弯矩和挠度, 柔性壁板上表面的结构等效应力公式如下:

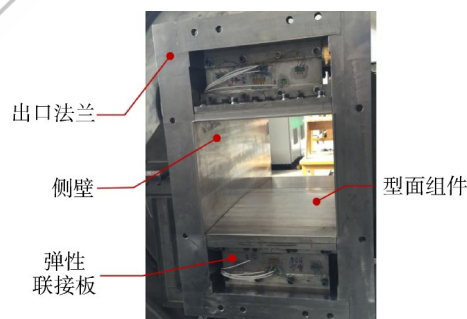
$$\sigma(x) = \frac{M(x) \cdot y}{I} \quad (18)$$

式中 $M(x)$ 为 x 处柔性壁板截面所受弯矩。

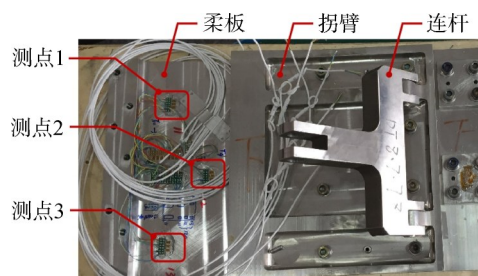
3 实验与讨论

3.1 实验设备与工况

CARDC 0.3 m 低温风洞单支点半柔壁喷管的实际结构如图3所示。其中, 喉道固块与柔性



(a) 装配后的喷管



(b) 型面组件上应变片位置

图3 0.3 m 低温风洞喷管照片

Fig.3 Photographs of 0.3 m cryogenic wind tunnel nozzle

壁板采用整体加工制造,柔性壁板部分厚度为 5 mm,喉道固块厚度约为 30 mm。结构材料采用 N50 不锈钢。

为了能够准确计算柔性壁板的变形位移和结构应力,对所使用材料固溶态 N50 进行了室温下力学性能测试,结果见表 1。

表 1 N50 室温力学性能

Table 1 Mechanical properties of N50 in the room temperature

参数	数值
抗拉强度/MPa	848
屈服强度/MPa	496
延伸率/%	45.0
收缩率/%	71.0
弹性模量/GPa	195

喷管的典型马赫数有 3 种,即 $Ma=1.0, 1.15, 1.3$,其马赫数型面坐标曲线如图 4 所示。其中, $Ma=1.0$ 型面为喷管的初始安装状态型面。在 $Ma=1.15, 1.3$ 两种工况下,柔性壁板的最大挠度分别为 2.07 mm 和 6.32 mm,最大挠度约为厚度的 1.264 倍,远大于厚度 1/5 这一小挠度近似条件,属于典型的大挠度变形问题。

针对每种马赫数工况,利用激光跟踪仪对喷管柔性壁板的迎气流型面进行了空间坐标测量。在喷管安装框架上选取基准点,以喷管出口为坐标原点,建立空间坐标系。 x 坐标轴沿风洞轴线逆气流方向, y 坐标轴为垂直于风洞轴线竖直方向指向洞体外。通过操作激光跟踪仪靶球,实现喷管型面测量。

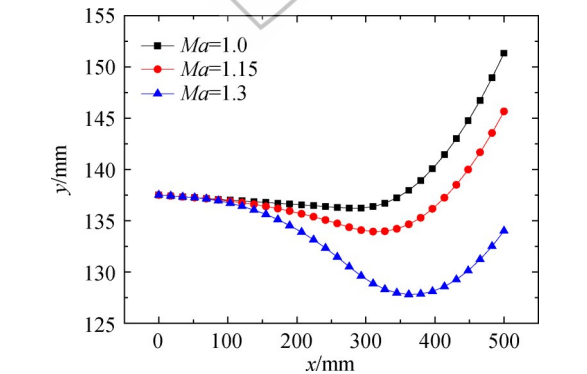


图 4 3 种不同马赫数型面曲线

Fig.4 Three different Mach number contour curves

3.2 型面偏差结果讨论

针对两种马赫数工况,利用数学软件 Maple 编制计算程序,基于椭圆积分半解析求解柔性壁板的大挠度成型问题。同时,利用非线性结构有限元软件 ABAQUS 开展半柔壁喷管的结构力学数值仿真,本文中按照 mm、N、MPa 的单位制规定输入和输出。其中,喉道固块、连杆等机构零部件按照刚体处理,柔性壁板设为弹性体,采用二次实体单元 C3D20R 进行网格划分,沿板厚方向设置 5 个单元,求解器设置中打开几何非线性选项。图 5 为有限元计算变形(U)和结构等效应力(S)云图,图 6 为计算结果与测量结果之间偏差曲线,其中 ELL-MEA 为椭圆积分解与测量结果偏差, FEM-MEA 为有限元计算结果与测量结果偏差, ELL-FEM 为椭圆积分解与有限元计算结果偏差。

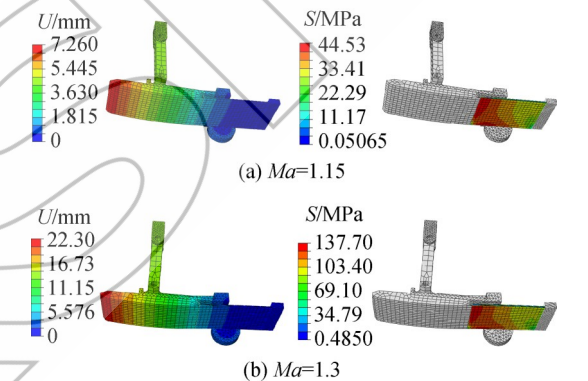


图 5 有限元计算变形和结构等效应力云图

Fig.5 Deformation and structural equivalent stress cloud diagram of finite element analysis

$Ma=1.15$ 工况下,两种计算方法与实测结果偏差在 ± 0.05 mm 之间,整体呈增大趋势,并以 $x=130$ mm 为分界点,上游为正偏差,下游为负偏差。0.3 m 低温风洞喷管出口尺寸为 325 mm (宽) $\times$ 275 mm (高),椭圆积分解与测量型面偏差最大为 0.049 mm,该偏差相对喷管出口高度尺寸比值约为 0.18%。椭圆积分解和有限元计算结果偏差优于两者与实验结果的偏差,范围在 ± 0.02 mm 之间。

$Ma=1.3$ 工况下,两种计算方法与实验结果偏差在 $-0.09\sim 0.06$ mm 之间。在出口位置,椭圆积分解与实验结果偏差最大,约为 -0.09 mm。除出口两点以外,其他位置偏差均在 ± 0.06 mm 之间。与 $Ma=1.15$ 工况类似的是, $Ma=1.3$ 工况下计算结果与实测结果的偏差曲线以一点 ($x=109$ mm) 为分界,上游基本为正偏差,下游为负偏

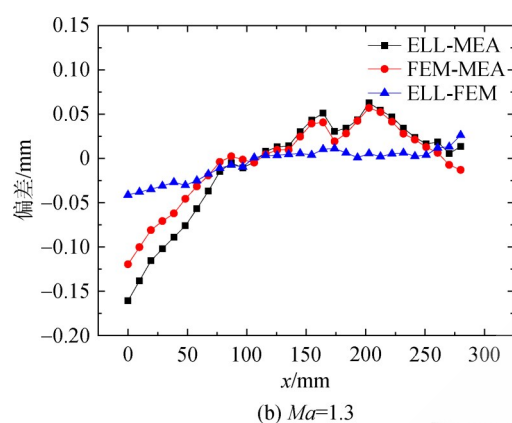
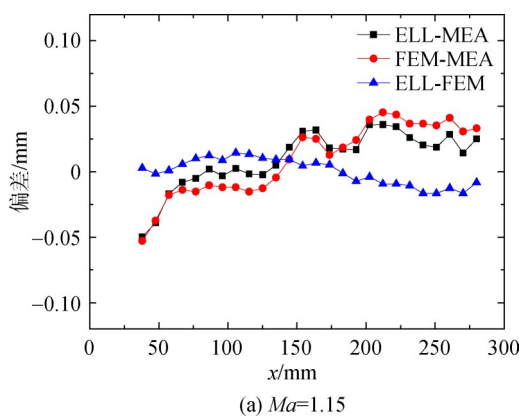


图6 计算与测量型面偏差

Fig.6 Errors between analysis and measurement results

差。椭圆积分解与测量型面偏差绝对值最大为0.089 mm,该偏差相对喷管出口高度尺寸比值约为0.32%。椭圆积分解和有限元仿真结果偏差优于两种计算结果与实验结果的偏差,最大值在±0.03 mm之间,两端部偏差稍大。

相比于有限元分析结果,基于欧拉梁理论的椭圆积分求解忽略了柔板沿宽度方向的变形,而宽度方向的翘曲会对柔板长度方向的弯曲产生一定影响。这种影响在挠度较小时(如 $Ma=1.15$ 工况)并不明显。但是随着挠度增大,在 $Ma=1.3$ 工况时,与实验结果相比,椭圆积分偏差大于有限元偏差。

尽管存在一定计算偏差,但是不同马赫数下两种计算结果偏差均优于计算结果与实验结果的偏差,表明了两种计算方法具有较好的一致性。由于柔性壁板下游与框架之间螺钉连接处存在多个接触面,柔性壁板与框架之间往往存在滑动、分离、弹性变形等多种现象,属于非线性范畴。本计算中采用了固定刚性连接的简化处理方法,连接

刚度大于实际情况,因此计算与实测结果的偏差曲线随着马赫数增大,最大偏差值增大,并在 $Ma=1.3$ 工况下呈现中间凸起、两端较小的趋势。

3.3 柔性壁板应力分析

基于椭圆积分求解出的柔性壁板表面应力沿轴线方向分布,如图7所示,在两种工况下应力分布均呈现随坐标增加,应力变大趋势。椭圆积分解的应力分布为直线,而有限元计算结果则呈现一定非线性。在 $Ma=1.15$ 工况下,两者计算偏差最大为3.5 MPa;在 $Ma=1.3$ 工况下,最大偏差为13 MPa。

柔性壁板上测点1和测点3为对称布置,两者测试结果基本一致,本文取其平均值作为测试结果。测点2位于中轴线上,应力值大于1、3两测点。在两种工况下,椭圆积分解与实验结果等效应力最大偏差为10%。

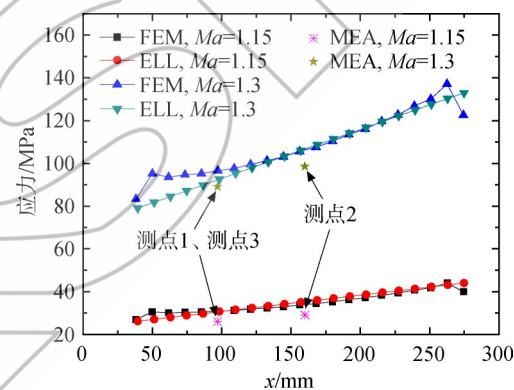


图7 两种工况下柔性壁板应力

Fig.7 Flexible plate stress of two conditions

在计算效率方面,以 $Ma=1.3$ 工况为例,使用Intel的i7-7500双核64位处理器为计算平台,计算机内存为8.0 GB,对喷管型面变形进行求解,椭圆积分求解与有限元仿真耗时分别为7.3 s和65 s。椭圆积分求解耗时约为有限元求解耗时的11.2%,可以有效提高跨超声速风洞单支点半柔壁喷管分析效率。

从以上结果可知,椭圆积分解与有限元仿真相比计算精度相当,而计算效率更高。基于椭圆积分的半解析方法可以在设计之初同气动条件开展快速迭代,实现气动性能和结构力学性能兼顾。此后再开展有限元分析完成校核,从而减少设计耗时,提高设计效率。

4 结 论

1) 针对跨超声速风洞单支点半柔壁喷管大

挠度变形半解析求解问题,发展了基于椭圆积分的柔性壁板大挠度求解方法。建立了单支点半柔壁喷管力学模型,基于欧拉梁理论推导了柔性壁板型面曲线的微分方程,给出了椭圆积分表达式。

2) 采用椭圆积分解计算了0.3 m低温风洞喷管变形和应力,计算结果和实验结果基本吻合,在 $Ma=1.15$ 和 $Ma=1.3$ 两种工况下,型面偏差分别小于喷管出口高度尺寸的0.18‰和0.32‰,柔性壁板等效应力相对误差小于10%。

3) 本文中椭圆积分耗时仅为有限元仿真耗时的11.2%,该方法有效提高了跨超声速风洞单支点半柔壁喷管的分析效率。

参考文献:

- [1] 廖达雄,陈吉明,郑娟,等.0.6 m连续式跨声速风洞总体性能[J].实验流体力学,2018,32(6):88-93.
LIAO Daxiong, CHEN Jiming, ZHENG Juan, et al. General performance of 0.6 m continuous transonic wind tunnel[J]. Journal of experiments in fluid mechanics, 2018, 32(6):88-93. (in Chinese)
- [2] 吴盛豪,房詠柳,陈吉明,等.超声速喷管性能优化研究与应用[J].航空动力学报,2017,32(9):2139-2144.
WU Shenghao, FANG Yongliu, CHEN Jiming, et al. Application research on supersonic nozzle performance optimization[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(9):2139-2144. (in Chinese)
- [3] 郭东明,雒建斌,方岱宁,等.大型风洞设计建设中的关键科学问题[J].中国科学基金,2017,31(5):420-427.
GUO Dongming, LUO Jianbin, FANG Daining, et al. Key scientific issues on the design and construction of large wind tunnels[J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 2017, 31(5):420-427. (in Chinese)
- [4] JUHANY K A, HUSAINI H E. Investigation of a single-jack flexible supersonic nozzle[R]. Reno, Nevada, US: the 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2007.
- [5] ROSEN J. The design and calibration of a variable Mach number nozzle[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1955, 22(7):484-490.
- [6] 赖欢,陈万华,孙德文,等.0.3 m低温连续式跨声速风洞结构设计[J].实验流体力学,2020,34(5):89-96.
LAI Huan, CHEN Wanhua, SUN Dewen. The structure design for 0.3 m cryogenic continuous transonic wind tunnel[J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2020, 34(5):89-96. (in Chinese)
- [7] 张伟,高荣,张双喜,等.0.3 m低温风洞液氮供给系统研制[J].航空动力学报,2020,35(5):1009-1017.
ZHANG Wei, GAO Rong, ZHANG Shuangxi, et al. Development of liquid nitrogen supplying system of 0.3 m cryogenic wind tunnel[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(5):1009-1017. (in Chinese)
- [8] 陈振华,张伟,高荣,等.液氮抽真空制冷的理论与试验[J].航空动力学报,2019,34(9):1971-1976.
CHEN Zhenhua, ZHANG Wei, GAO Rong, et al. Theoretical and experimental studies of vacuum cooling of liquid nitrogen[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(9):1971-1976. (in Chinese)
- [9] 聂旭涛,郭隆德,刘伯林.基于ADAMS风洞柔壁喷管动力学仿真分析[J].实验流体力学,2011,25(2):73-76.
NIE Xutao, GUO Longde, LIU Bolin. Dynamics simulation and analysis of flexible nozzle in wind tunnel based on ADAMS[J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2011, 25(2):73-76. (in Chinese)
- [10] 聂旭涛,赖欢,张艳辉.半柔壁喷管机构动力学仿真技术研究[J].实验流体力学,2012,26(4):91-95.
NIE Xutao, LAI Huan, ZHANG Yanhui. Simulation technique of semi-flexible nozzle machine dynamics[J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2012, 26(4):91-95. (in Chinese)
- [11] CHEN Pengfei, WU Feng, XU Jinglei, et al. Design and implementation of rigid-flexible coupling for a half-flexible single-jack nozzle[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2016, 29(6):1477-1483.
- [12] 刘佳鑫,秦伟,周扬,等.半柔壁喷管喉块柔板接触力仿真分析[J].机械科学与技术,2020,39(1):22-27.
LIU Jiaxin, QIN Wei, ZHOU Yang, et al. Simulation analysis of contact force of semi-flexible wall nozzle throat[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2020, 39(1):22-27. (in Chinese)
- [13] 刘铭甲.半挠性喷管挠性板弹性曲线计算方法[J].国防科技大学学报,1992,14(2):109-114.
LIU Mingjia. A method of calculating elastic curve of semi-flexible plate nozzle[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1992, 14(2):109-114. (in Chinese)
- [14] 张晓伟,杨嘉陵.柔壁风洞设计中的Elastica反问题[J].航空学报,2005,26(6):42-46.
ZHANG Xiaowei, YANG Jialing. Inverse problem of elastica in the design of flexible-walled wind tunnel[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2005, 26(6):42-46. (in Chinese)
- [15] BISSHOPP K E, DRUCKER D C. Large deflection of cantilever beams[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1945, 3(3):272-275.
- [16] HOWELL L L, LEONARD J N. Optimal loading conditions for non-linear deflections[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1997, 32(3):505-514.
- [17] ZHANG Aimei, CHEN Guimin. A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(2):80-85.
- [18] 张爱梅,陈贵敏,贾建援.基于完备椭圆积分分解的交叉簧片式柔性铰链大挠度建模[J].机械工程学报,2014,50(11):80-85.

- ZHANG Aimei, CHEN Guimin, JIA Jianyuan. Large deflection modeling of cross-spring pivots based on comprehensive elliptic integral solution[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(11):80-85. (in Chinese)
- [19] 安朝, 谢长川, 杨超. 弹性欧拉梁大变形分析的椭圆积分统一形式[EB/OL]. [2021-01-27]. <https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0186>.
- [20] XU Ke, LIU Haitao, XIAO Juliang. Static deflection modeling of combined flexible beams using elliptic integral solution[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020, 129:103637.1-103637.8.
- [21] XU Ke, LIU Haitao, YUE Wei, et al. Kinematic modeling and optimal design of a partially compliant four-bar linkage using elliptic integral solution[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 157:104214.1-104214.15.
- [22] ALESSANDRO C, MICHELE L, GAETANO S. Alternative elliptic integral solution to the beam deflection equations for the design of compliant mechanisms[J]. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 2019, 13(2):1-7.
- [23] 刘鸿文. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

(编辑: 王碧琚)